XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

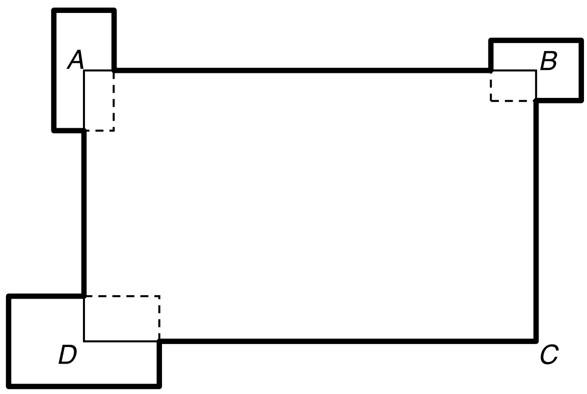
18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Las edades de Carlos, Hugo y Elvira vienen dadas por números enteros. Hugo tiene 65 años y la suma de las edades de Carlos y Elvira es 100 años. Hace 9 años la edad de Elvira era un número múltiplo de 17 que, además, no era primo con el número de la edad actual de Hugo. ¿Cuál es la edad actual de Carlos?

2. Los números A = 878 787 878 787 y B = 787 878 787 878, de 12 cifras cada uno, están formados sólo por sietes y ochos. ¿Cuál es su máximo común divisor?

3. El perímetro del rectángulo *ABCD* es de 30 cm. Dibujamos otros tres rectángulos cuyos centros son los vértices *A*, *B* y *D* y sus lados paralelos a los del rectángulo *ABCD*, como muestra la figura que no está hecha a escala. Si la suma de los perímetros de estos tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono cuyos lados están marcados con línea gruesa?

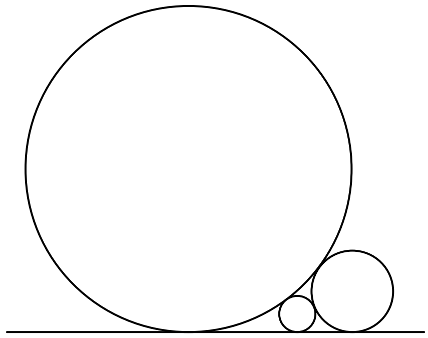


XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

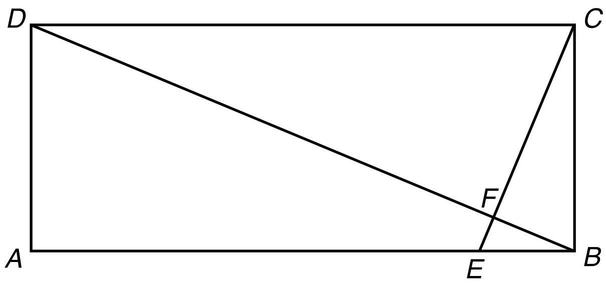
18 de noviembre de 2017

<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. En la figura adjunta se observan tres circunferencias tangentes entre sí y también tangentes a una recta. Si los radios de las circunferencias mayores miden 36 y 9, ¿cuánto mide el radio de la pequeña?



2. En el rectángulo *ABCD* de la figura, *AB* = 24 y *AD* = 10. El segmento *CE* es perpendicular a la diagonal *BD* y el punto *F* la intersección de ambos segmentos. ¿Cuál es la longitud del segmento *EF*?



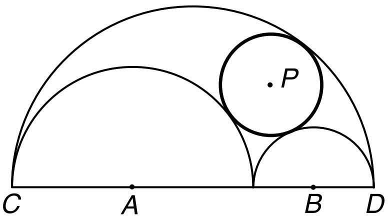
3. ¿Cuántos números de cinco cifras, que empiecen por 37, verifican que tanto [37abc], como [37bca] y [37cab] son múltiplos de 37? Por ejemplo: 37296, 37962 y 37629 son tres de ellos.
Nota. La expresión [37abc] representa al número cuyas cifras son 3, 7, a, b, c.

XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. En la figura se observan dos semicircunferencias de centros A y B y radios 2 y 1 respectivamente. Otra semicircunferencia de diámetro CD, tangente exterior a ambas semicircunferencias y una circunferencia de centro P que es tangente a las tres semicircunferencias anteriores. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia de centro P?



2. Sean x e y números reales tales que $|x| \neq |y|$ y que verifican las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x^3 = 13x + 3y \\ y^3 = 3x + 13y \end{array}\right\}$.

Calcular $(x^2 - y^2)^2$.

3. Determinar el valor de $x + y$ sabiendo que: $\left.\begin{array}{l} [x] + [y] + y = 43{,}8 \\ x + y - [x] = 18{,}4 \end{array}\right\}$

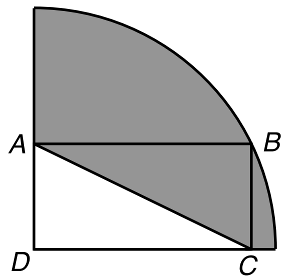
Nota. $[a]$ es la parte entera de a, es decir, el mayor entero menor o igual que a.

XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

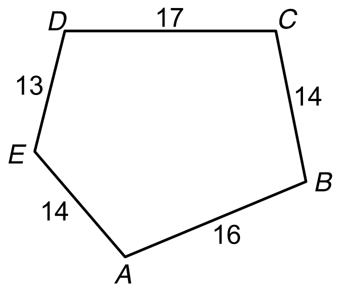
PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En la figura adjunta se observa un cuadrante de circunferencia de centro *D* y radio *r* y un rectángulo *ABCD* inscrito en el cuadrante. Si el perímetro del rectángulo es 16 y el perímetro de la región sombreada es $10 + 3\pi$, ¿cuál es el valor del radio *r* ?



2. Escribimos en una lista todos los números enteros desde el 1 hasta el 2017. Si suprimimos todos los cuadrados perfectos y también todos los cubos perfectos, ¿cuántos números nos quedarán en esa lista?

3. Se considera el pentágono *ABCDE* de la figura en el que se indican las longitudes de sus lados. Con centro en cada uno de sus vértices, dibujamos cinco circunferencias de forma que las que tienen por centro dos vértices del mismo lado son tangentes entre sí. ¿Cuál es el centro de la mayor que hemos dibujado y cuál es su radio?



4. Las nueve casillas del "cuadrado mágico" de la figura están ocupadas por los nueve divisores de 100. (El producto de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es el mismo). Si el 20 y el 1 ocupan las casillas que muestra la figura, ¿qué número ocupará la casilla sombreada?

20	1	

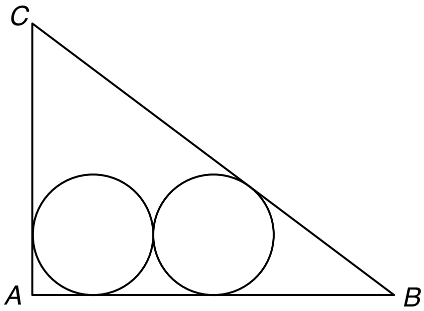
XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

PRUEBA INDIVIDUAL **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

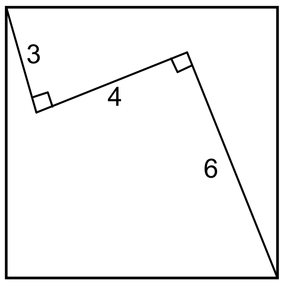
1. ¿Hay algún triángulo en el que las medidas de sus ángulos, en grados sexagesimales, vengan dadas por números enteros y que verifiquen que la suma de la medida de uno de ellos más el producto de las medidas de los otros dos sea 2017?
Indicación. Te puede ayudar saber que 919 es un número primo.

2. En el triángulo rectángulo *ABC*, de catetos *AC* = 3 y *AB* = 4, inscribimos dos circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. Calcula el radio de las circunferencias.



3. En un trayecto en tren entre dos ciudades, una hora después de la salida, el tren se detuvo por un pequeño fallo mecánico que se solucionó en media hora pero que hizo que el tren continuara su viaje a la mitad de la velocidad normal. Por esta circunstancia llegó a su destino con dos horas de retraso. Expertos consultados aseguraron que si la avería se hubiera producido 100 km más adelante, la demora habría sido de sólo una hora. ¿Cuál es la distancia que separa a estas dos ciudades?
Nota. Suponemos que el tren circula siempre a velocidad constante.

4. Calcula el área del cuadrado de la figura.



XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

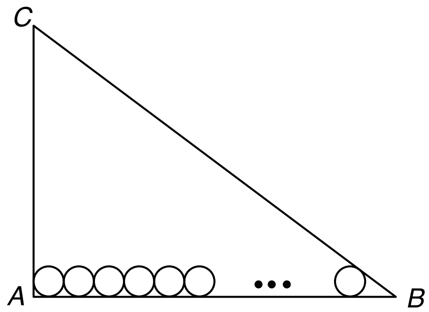
PRUEBA INDIVIDUAL **Bachillerato** (90 minutos)

1. Los números *x, y, z,* son enteros. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\left.\begin{aligned} x^2-3xy+2y^2-z^2&=31\\ -x^2+6yz+2z^2&=44\\ x^2+xy+8z^2&=100 \end{aligned}\right\}$$

2. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (x, y) tales que $4^y-615=x^2$.

3. En el triángulo rectángulo ABC, de catetos AC = 3, AC = 4, inscribimos n circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de n se verifica que el radio de cada una de ellas es $\dfrac{1}{2017}$?



4. El número 21! Tiene más de 60 000 divisores (positivos). Si elegimos al azar uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar?

XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- El peso total de un frasco y su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el frasco contiene 15 pastillas vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuántos gramos pesa el frasco?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
Los números m, n, p y q son enteros positivos y diferentes.
Si además satisfacen la ecuación $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=T$, ¿cuál es el valor de su suma?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

En el último examen de Matemáticas de mi clase la nota media ha sido $5+\frac{T}{100}$. Si la nota media de las chicas fue de 6 y la de los chicos de 5, ¿cuántos estudiantes hay en mi clase si no puede haber más de 30?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

3º y 4º de ESO.-

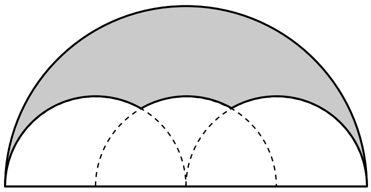
.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la figura adjunta se observa un semicírculo de radio T, y tres semicírculos iguales de radio $\frac{T}{2}$.

¿Cuál es el área de la zona sombreada?.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



2B.- En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que sacamos dos del mismo color?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Dos trenes viajan a velocidad constante. El más lento recorre en 15 minutos $\frac{T}{27}$ km menos que el más rápido y tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del tren más rápido?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

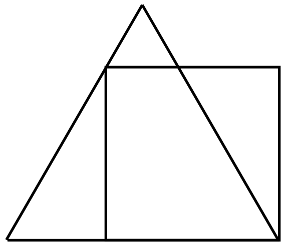
XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
En la figura se observa un triángulo equilátero y un cuadrado de perímetro T que tiene un vértice común con el triángulo y otros dos en lados del triángulo. Si escribimos el perímetro del triángulo como $a+b\sqrt{3}$ con a y b enteros positivos, ¿calcula el número $\dfrac{a}{b}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.
Los puntos $A\left(\dfrac{T}{2}, 92\right)$; $B(17, 76)$ y $C(19, 84)$ son los centros de tres círculos de radio 3. Una recta que pasa por el punto B corta a los tres círculos de forma que la suma de las áreas de los trozos de círculo que deja a cada lado es la misma. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- El producto de las edades de un padre y sus dos hijos es 4018. Si actualmente el padre tiene menos de 45 años, ¿qué edad tenía cuando nació el hijo mayor?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

18 de noviembre de 2017

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

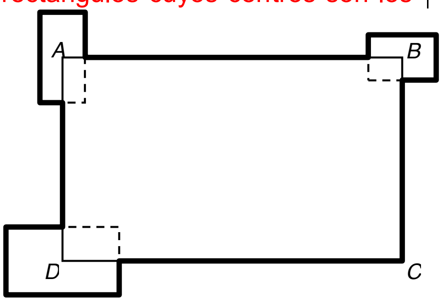
1. Las edades de Carlos, Hugo y Elvira vienen dadas por números enteros. Hugo tiene 65 años y la suma de las edades de Carlos y Elvira es 100 años. Hace 9 años la edad de Elvira era un número múltiplo de 17 que, además, no era primo con el número de la edad actual de Hugo. ¿Cuál es la edad actual de Carlos?

H = 65 = 5·13; C + E = 100; E – 9 = 17*k*. Pero *k* solamente puede ser 5 ya que *k* = 13 nos daría una edad de Elvira mayor que 100. Por lo tanto E = 94 y C = 6 años.

2. Los números A = 878 787 878 787 y B = 787 878 787 878, de 12 cifras cada uno, están formados sólo por sietes y ochos. ¿Cuál es su máximo común divisor?

A = 87·10 101 010 101 = 3·29·10 101 010 101; B = 78·10 101 010 101 = 3·2·13·10 101 010 101;
El mcd(A, B) = 3·10 101 010 101 = 30 303 030 303.

3. El perímetro del rectángulo *ABCD* es de 30 cm. Dibujamos otros tres rectángulos cuyos centros son los vértices *A*, *B* y *D* y sus lados paralelos a los del rectángulo *ABCD*, como muestra la figura que no está hecha a escala. Si la suma de los perímetros de estos tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono cuyos lados están marcados con línea gruesa?



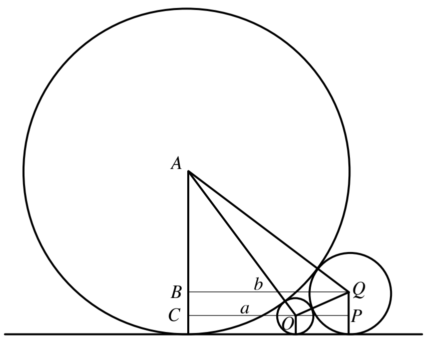
Cada rectángulo pequeño añade al perímetro del rectángulo *ABCD* un trozo que es el triple del que quita. Por lo tanto:

$$p = 30 - \frac{20}{4} + \frac{3 \cdot 20}{4} = 40\,\text{cm}.$$

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. En la figura adjunta se observan tres circunferencias tangentes entre sí y también tangentes a una recta. Si los radios de las circunferencias mayores miden 36 y 9, ¿cuánto mide el radio de la pequeña?

AB = 36 – 9 = 27; *AQ* = 36 + 9 = 45.
Llamando *x* al radio de la circunferencia pequeña, *b* = *BO* y *a* = *CO* se tiene:



En *ACO*: $a^2 = (36+x)^2 - (36-x)^2 \Rightarrow a = 12\sqrt{x}$

En *ABQ*: $b^2 = 45^2 - 27^2 = 1296 \Rightarrow b = 36$

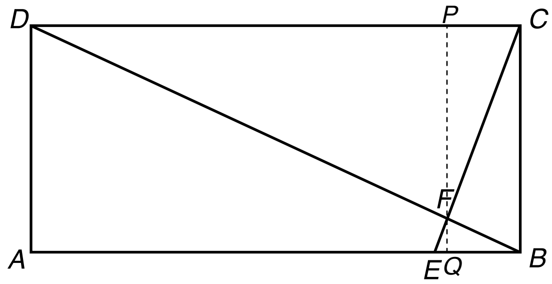
En *OPQ*: $(9+x)^2 - (9-x)^2 = (b-a)^2 = \left(36 - 12\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow$

$$36x = 144\left(9 + x - 6\sqrt{x}\right) \Rightarrow x = 4\left(9 + x - 6\sqrt{x}\right) \Rightarrow$$

$$24\sqrt{x} = 3x + 36 \Rightarrow 8\sqrt{x} = x + 12 \Rightarrow 64x = x^2 + 24x + 144 \Rightarrow$$

$$x^2 - 40x + 144 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 36 \end{cases}$$ La solución es *x* = 4. La otra no tiene sentido.

2. En el rectángulo *ABCD* de la figura, *AB* = 24 y *AD* = 10. El segmento *CE* es perpendicular a la diagonal *BD* y el punto *F* la intersección de ambos segmentos. ¿Cuál es la longitud del segmento *EF* ?



Diagonal *BD*: $BD = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$

Área de *BCD*: $S_{BCD} = \frac{1}{2}(24 \cdot 10) = \frac{1}{2}(26 \cdot CF) \Rightarrow CF = \frac{120}{13}$

Triángulo *CDF*: $DF = \sqrt{24^2 - \left(\frac{120}{13}\right)^2} = \frac{288}{13}$

$FB = DB - DF = 26 - \frac{288}{13} = \frac{50}{13}$. Por semejanza de los triángulos *DFC* y *BFE*

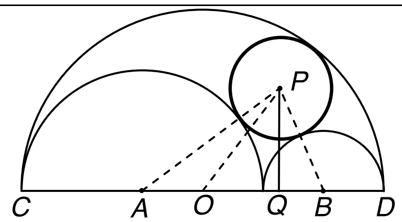
$$\frac{DF}{FB} = \frac{CF}{EF} \Rightarrow EF = \frac{\frac{120}{13} \cdot \frac{50}{13}}{\frac{288}{13}} = \frac{125}{78}$$

3. ¿Cuántos números de cinco cifras, que empiecen por 37, verifican que tanto [37abc], como [37bca] y [37cab] son múltiplos de 37? Por ejemplo: 37296, 37962 y 37629 son tres de ellos.
Nota. La expresión [37abc] representa al número cuyas cifras son 3, 7, a, b, c.

El número [37abc] = 37000 + [abc] es múltiplo de 37 si y solamente si [abc] lo es.
Buscamos todos los múltiplos de 37 de tres cifras, incluyendo 000, 037 y 074.
000, 037, 074, 111, 148, 185, 222, 259, 296, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 703, 740, 777, 814, 851, 888, 925, 962, 999. En total hay 28 y todos cumplen la condición del enunciado.

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. En la figura se observan dos semicircunferencias de centros *A* y *B* y radios 2 y 1 respectivamente. Otra semicircunferencia de diámetro *CD*, tangente exterior a ambas semicircunferencias y una circunferencia de centro *P* que es tangente a las tres semicircunferencias anteriores. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia de centro *P*?



Llamando *h* a la longitud del segmento *PQ*, *x* al radio buscado y teniendo en cuenta que *OD* = 3, *AP* = 2 + *x*, *OP* = 3 – *x*, *PB* = 1 + *x*, *AB* = 3, *OB* = 2 y que además los triángulos *APQ, OPQ* y *BPQ* son rectángulos, tenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{(3-x)^2 - h^2} + \sqrt{(1+x)^2 - h^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{(3-x)^2 - h^2} = 2 - \sqrt{(1+x)^2 - h^2} \\ \sqrt{(2+x)^2 - h^2} + \sqrt{(1+x)^2 - h^2} = 3 \Rightarrow \sqrt{(2+x)^2 - h^2} = 3 - \sqrt{(1+x)^2 - h^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)^2 - h^2 = 4 + (1+x)^2 - h^2 - 4\sqrt{(1+x)^2 - h^2} \\ (2+x)^2 - h^2 = 9 + (1+x)^2 - h^2 - 6\sqrt{(1+x)^2 - h^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(3-x)^2 = 12 + 3(1+x)^2 - 12\sqrt{(1+x)^2 - h^2} \\ 2(2+x)^2 = 18 + 2(1+x)^2 - 12\sqrt{(1+x)^2 - h^2} \end{cases}$$ y restando

estas expresiones se obtiene $28x - 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{7}$.

2. Sean *x* e *y* números reales tales que $|x| \neq |y|$ y que verifican las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x^3 = 13x + 3y \\ y^3 = 3x + 13y \end{array}\right\}$.

Calcular $(x^2 - y^2)^2$.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 = 13x + 3y \\ y^3 = 3x + 13y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^4 = 13x^2 + 3xy \\ y^4 = 3xy + 13y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4 - y^4 = 13x^2 - 13y^2 \Rightarrow (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 13(x^2 - y^2)$$

Como $|x| \neq |y|$ se deduce que $x^2 + y^2 = 13$.

Por otra parte, $x^3 - y^3 = 10x - 10y \Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 10(x-y) \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 10 \Rightarrow xy = 10 - 13 = -3$
y por lo tanto $x^2y^2 = 9$.

$(x^2 + y^2)^2 = 13^2 \Rightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 169 \Rightarrow x^4 + y^4 = 169 - 18 = 151$.

Finalmente, $(x^2 - y^2)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = 151 - 18 = 133$

3. Determinar el valor de *x + y* sabiendo que: $\left.\begin{array}{r}[x]+[y]+y=43{,}8\\ x+y-[x]=18{,}4\end{array}\right\}$

Nota. $[a]$ es la parte entera de *a*, es decir, el mayor entero menor o igual que *a*.

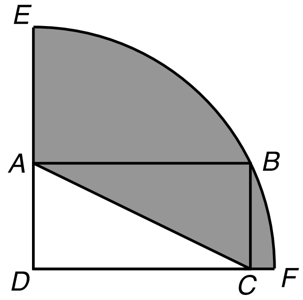
$[x]+[y]+y=43{,}8 \Rightarrow y=[y]+0{,}8$ (La parte decimal de *y* es 0,8)

$x+y-[x]=18{,}4 \Rightarrow x+[y]+0{,}8-[x]=18{,}4 \Rightarrow x+[y]-[x]=17{,}6 \Rightarrow x-[x]=0{,}6;\ [y]=17.$

$[x]+17+17{,}8=43{,}8 \Rightarrow [x]=9$. De donde *x* = 9,6   *y* = 17,8 y por lo tanto *x + y* = 27,4.

PRUEBA INDIVIDUAL **1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

1. En la figura adjunta se observa un cuadrante de circunferencia de centro D y radio r y un rectángulo $ABCD$ inscrito en el cuadrante. Si el perímetro del rectángulo es 16 y el perímetro de la región sombreada es $10 + 3\pi$, ¿cuál es el valor del radio r?



Llamando r al radio, $x = AD$, $y = DC$, tenemos que $x + y = 8$, $AC = DB = r$.
Entonces $EA + CF = (r - x) + (r - y) = 2r - (x + y) = 2r - 8$

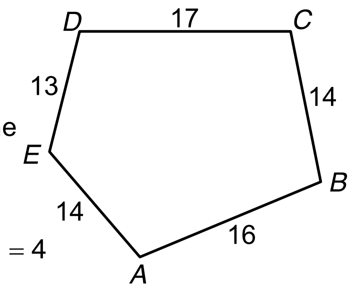
El perímetro es $EA + AC + CF + arcoFE = 2r - 8 + r + \frac{1}{4}2\pi r = 3r - 8 + \frac{\pi}{2}r$, de donde se obtiene que

$$3r - 8 + \frac{\pi}{2}r = 10 + 3\pi \Rightarrow r\left(3 + \frac{\pi}{2}\right) = 18 + 3\pi \Rightarrow r(6 + \pi) = 36 + 6\pi \Rightarrow r = 6$$

2. Escribimos en una lista todos los números enteros desde el 1 hasta el 2017. Si suprimimos todos los cuadrados perfectos y también todos los cubos perfectos, ¿cuántos números nos quedarán en esa lista?

Cuadrados perfectos: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 44^2$ En total 44.
Cubos perfectos: $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, 12^3$. En total 12.
Cuadrados y cubos perfectos a la vez: $1^6, 2^6, 3^6$. En total 3.
Cuadrados o cubos perfectos: 44 + 12 – 3 = 53
Números de la lista que no son ni cuadrados ni cubos perfectos: 2017 – 53 = 1964.

3. Se considera el pentágono $ABCDE$ de la figura en el que se indican las longitudes de sus lados. Con centro en cada uno de sus vértices, dibujamos cinco circunferencias de forma que las que tienen por centro dos vértices del mismo lado son tangentes entre sí. ¿Cuál es el centro de la mayor que hemos dibujado y cuál es su radio?



$$\left.\begin{aligned} r_A + r_B &= 16 \\ r_B + r_C &= 14 \\ r_C + r_D &= 17 \\ r_D + r_E &= 13 \\ r_E + r_A &= 14 \end{aligned}\right\}$$ Sumando las ecuaciones 1, 3 y 5 y restando la 2 y 4, se obtiene

$2r_A = 16 + 17 + 14 - 14 - 13 = 20 \Rightarrow r_A = 10$ y de aquí: $r_B = 6,\ r_C = 8,\ r_D = 9,\ r_E = 4$
El centro de la mayor es A y su radio 10.

4. Las nueve casillas del “cuadrado mágico” de la figura están ocupadas por los nueve divisores de 100. (El producto de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es el mismo). Si el 20 y el 1 ocupan las casillas que muestra la figura, ¿qué número ocupará la casilla sombreada?

Los divisores son: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100.
El producto de todos es: $2^9 \cdot 5^6$ y el producto de los de cada fila, diagonal o columna es $\sqrt[3]{2^9 \cdot 5^9} = 2^3 \cdot 5^3 = 1000$, luego el 50 ya está claro dónde va.
En el cuadro central debe estar el divisor central, es decir, el 10. Además, en la columna central faltan dos divisores cuyo producto sea 1000 y de los divisores que quedan solo pueden ser el 10 y el 100.
Ya se puede completar de una forma sencilla, obteniendo el 4 en la casilla pedida

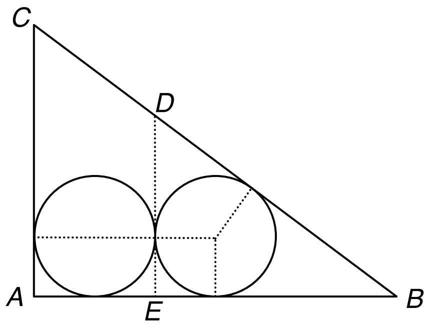
20	1	50
25	10	4
2	100	5

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. ¿Hay algún triángulo en el que las medidas de sus ángulos, en grados sexagesimales, vengan dadas por números enteros y que verifiquen que la suma de la medida de uno de ellos más el producto de las medidas de los otros dos sea 2017?
Indicación. Te puede ayudar saber que 919 es un número primo.

Sean *x, y, z* las medidas de los ángulos, o mejor, *x, y*, 180 – *x* – *y*.
$(180-x-y)+xy=2017 \Rightarrow xy-x-y=1837 \Rightarrow (x-1)(y-1)-1=1837 \Rightarrow (x-1)(y-1)=2\cdot 919$.
Como 919 es primo solo queda la posibilidad que uno de los factores sea 2 y el otro 919, lo cual es imposible.

2. En el triángulo rectángulo *ABC*, de catetos *AC* = 3 y *AB* = 4, inscribimos dos circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. Calcula el radio de las circunferencias.



Trazando el segmento *DE* se obtiene el triángulo *EBD*, semejante al *ABC*, en el que *EB* = 4 – 2*r* y por lo tanto la razón de semejanza es $\frac{4-2r}{4}$. Por lo tanto $ED=\frac{3(4-2r)}{4}$ y $BD=\frac{5(4-2r)}{4}$.

Su perímetro es $\frac{12(4-2r)}{4}=3(4-2r)$ y su área $\frac{1}{2}\cdot r\cdot 3(4-2r)$.

que también se puede expresar como $\frac{1}{2}\cdot\frac{3(4-2r)}{4}\cdot(4-2r)$.

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3(4-2r)}{4}\cdot(4-2r)=\frac{1}{2}\cdot r\cdot 3(4-2r) \Rightarrow \frac{3}{4}(4-2r)=3r \Rightarrow r=\frac{2}{3}$$

3. En un trayecto en tren entre dos ciudades, una hora después de la salida, el tren se detuvo por un pequeño fallo mecánico que se solucionó en media hora pero que hizo que el tren continuara su viaje a la mitad de la velocidad normal. Por esta circunstancia llegó a su destino con dos horas de retraso. Expertos consultados aseguraron que si la avería se hubiera producido 100 km más adelante, la demora habría sido de sólo una hora. ¿Cuál es la distancia que separa a estas dos ciudades?
Nota. Suponemos que el tren circula siempre a velocidad constante.

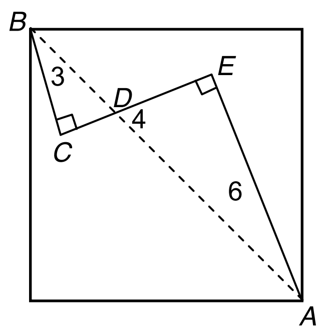
Sean: *v* la velocidad habitual del tren
t_1 el tiempo que tarda el tren de *B* a *D* cuando está averiado.
t_2 el tiempo que tarda el tren de *C* a *D* cuando está averiado.

Entonces $BD=\frac{1}{2}v\,t_1=v(t_1-2+0{,}5) \Rightarrow t_1=3$ horas. $CD=\frac{1}{2}v\,t_2=v(t_2-1+0{,}5) \Rightarrow t_2=1$ hora.

Luego el tiempo que tardó de *B* a *C*, 100 km, fue de 2 horas y por lo tanto $\frac{1}{2}v=50 \Rightarrow v=100$ km/h.

Como consecuencia *AB* = 100 km/h · 1 h = 100 km y *CD* = 50 km/h · 1 h = 50 km.
La distancia entre *A* y *D* es: 100 + 100 + 50 = 250 km

4. Calcula el área del cuadrado de la figura.



Al trazar la diagonal *AB* se obtienen dos triángulos rectángulos, *DCB* y *DEA*, semejantes en los que la razón de semejanza es *k* = 2.

Por lo tanto *DE* = 2*CD* y como *CE* = 4 entonces $CD=\frac{4}{3}$ y $DE=2\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

Por Pitágoras $BD=\sqrt{3^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{97}$ y la diagonal será $AB=\sqrt{97}$.

Como en un cuadrado $d^2=2l^2 \Rightarrow 97=2l^2 \Rightarrow l^2=\frac{97}{2}$ que es el área del cuadrado.

PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Los números *x, y, z,* son enteros. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\left.\begin{array}{r} x^2-3xy+2y^2-z^2=31 \\ -x^2+6yz+2z^2=44 \\ x^2+xy+8z^2=100 \end{array}\right\}$$

Sumando las tres ecuaciones se obtiene, $x^2-2xy+y^2+y^2+6yz+9z^2=175 \Rightarrow (x-y)^2+(y+3z)^2=175$

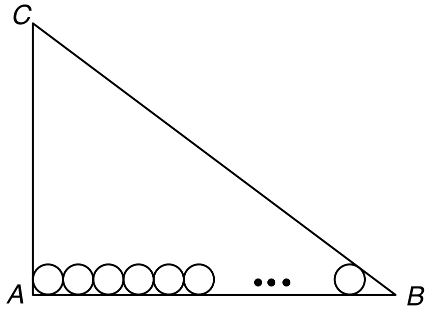
Como *x, y, z* son enteros, $(x-y)^2$ y $(y+3z)^2$ son cuadrados perfectos menores que 175 y uno de ellos mayor o igual a 81 para que la suma sea 175. Probando con 81, 100, 121, 144 y 169 se observa que sus diferencias con 175 son: 94, 75, 54, 31 y 5, ninguna de ellas es un cuadrado perfecto.
Por lo tanto no tiene ninguna solución entera.

2. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (*x, y*) tales que $4^y-615=x^2$.

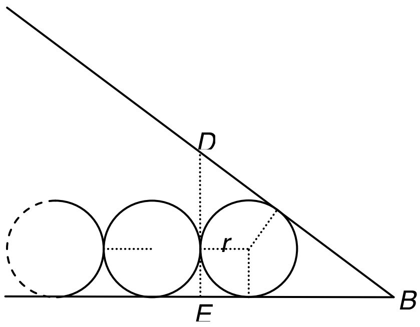
$$4^y-615=x^2 \Leftrightarrow 4^y-x^2=615 \Leftrightarrow \left(2^y+x\right)\left(2^y-x\right)=3\cdot 5\cdot 41$$

Las combinaciones posibles para esos dos factores son: (615, 1); (205, 3); (123, 5); (41, 15).
Como $\left(2^y+x\right)+\left(2^y-x\right)=2^{y+1}$ la única posibilidad de obtener una potencia de dos es 123 + 5 = 128 = 2^7, de donde se deduce que y = 6 y x = 59. En los demás casos las sumas que se obtienen, 616, 208 y 56, no son potencias de 2. El par buscado es (59, 6).

3. En el triángulo rectángulo *ABC*, de catetos *AC* = 3, *AC* = 4, inscribimos *n* circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la figura. ¿Para qué valor de *n* se verifica que el radio de cada una de ellas es $\dfrac{1}{2017}$?



Si nos fijamos tan solo en las proximidades del vértice *B*, y como el triángulo *EBD* es semejante al *ABC*, podemos decir que *ED* = 3*x*, *EB* = 4*x*, *BD* = 5*x*.
Teniendo en cuenta el área del triángulo *EBD* podemos escribir:



$$\frac{1}{2}(4x)(3x)=r\left(\frac{3x+4x+5x}{2}\right) \Rightarrow 6x^2=r\cdot 6x \Rightarrow r=x.$$

El lado *AB* = *AE* + *EB* = 2(*n* – 1)*r* + 4*r* = 4 $\Rightarrow 2n=\dfrac{4}{r}-2 \Rightarrow n=\dfrac{2}{r}-1$.

Como $r=\dfrac{1}{2017}$ entonces $n=2\cdot 2017-1=4033$

4. El número 21! Tiene más de 60 000 divisores (positivos). Si elegimos al azar uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar?

$$21!=2^{18}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19.$$

El número total de divisores es: $19\cdot 10\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ y el de impares $10\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, por lo que

$$p(I)=\frac{10\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{19\cdot 10\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{19}$$

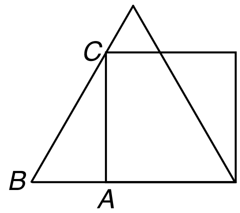
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

RELEVO A.-

1A.- El peso total de un frasco y su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el frasco contiene 15 pastillas vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuántos gramos pesa el frasco?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

Se deduce que 5 pastillas pesan 180 – 165 = 15 gramos. Cada pastilla pesa 3 gramos, 20 pastillas 60 gramos, luego el frasco pesa 180 – 60 = 120 gramos.

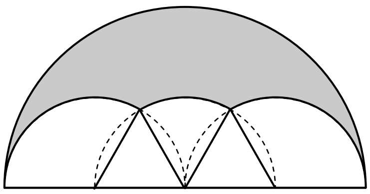
3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A. En la figura se observa un triángulo equilátero y un cuadrado de perímetro T que tiene un vértice común con el triángulo y otros dos en lados del triángulo. Si escribimos el perímetro del triángulo como $a+b\sqrt{3}$ con a y b enteros positivos, ¿calcula el número $\frac{a}{b}$?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)



T = 120. El lado del cuadrado es 30. En el triángulo *CBA,* 30-60-90, el lado *AC* = 30 por lo que $AB=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$ y el lado del triángulo equilátero es $30+10\sqrt{3}$ y su perímetro $90+30\sqrt{3}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{90}{30}=3$$

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En la figura adjunta se observa un semicírculo de radio T, y tres semicírculos iguales de radio $\frac{T}{2}$. ¿Cuál es el área de la zona sombreada?
Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



T = 3. En la figura puede observarse, en blanco, dos triángulos equiláteros de lado $\frac{3}{2}$, dos sectores circulares de radio $r=\frac{3}{2}$ y amplitud 120º y otro sector del mismo radio y 60º de amplitud.

El área de la zona en blanco es:

$$2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\pi\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3}+\pi\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{6}=\frac{9\sqrt{3}}{8}+\pi\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{8}\right)=\frac{9\sqrt{3}}{8}+\frac{45}{8}\pi.$$

El área pedida es $\frac{1}{2}3^2\pi-\left(\frac{9\sqrt{3}}{8}+\frac{15}{8}\pi\right)=\frac{21}{8}\pi-\frac{9\sqrt{3}}{8}=\frac{3}{8}\left(7\pi-3\sqrt{3}\right)$

RELEVO B.-

2B.- En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que sacamos dos del mismo color?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

Si se sacan 3 puede haber uno de cada color pero al sacar uno más es seguro que coincidirá con el color de alguno de los tres primeros. Hay que sacar 4.

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
Los números *m, n, p* y *q* son enteros positivos y diferentes.
Si además satisfacen la ecuación $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q)=T$, ¿cuál es el valor de su suma?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

$T = 4$ y por tanto los únicos enteros positivos diferentes cuyo producto es 4 son: 1, 2, (–1) y (–2).
Los números *m, n, p, q,* tienen que ser 5, 6, 8 y 9, en cualquier orden, y su suma es 28.

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B y k la suma de las cifras de T.
Los puntos $A\left(\frac{T}{2}, 92\right)$; $B(17, 76)$ y $C(19, 84)$ son los centros de tres círculos de radio 3. Una recta que pasa por el punto B corta a los tres círculos de forma que la suma de las áreas de los trozos de círculo que deja a cada lado es la misma. ¿Cuál es la pendiente de la recta?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

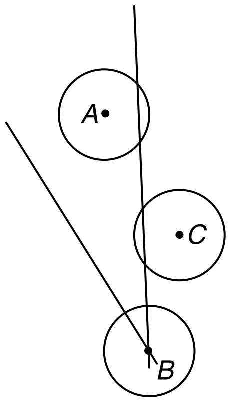
$T = 28$ y por lo tanto $A(14, 92)$.
Una recta que pasa por el centro del círculo lo divide en dos partes de igual área por lo que los trozos en los que divide a los otros dos han de ser iguales y eso quiere decir que la distancia de esos centros a la recta ha de ser la misma y menor que 3 (para que los corte).
La recta es $r:(y-76)=m(x-17) \Leftrightarrow mx-y+76-17m=0$

$$d(A, r)=d(C, r) \Rightarrow \frac{|14m-92+76-17m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|19m-84+76-17m|}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow |-3m-16|=|2m-8|$$

Las dos posibilidades son: $-3m-16=2m-8 \Rightarrow m=-\frac{8}{5}$ y $3m+16=2m-8 \Rightarrow m=-24$.

En el primer caso $d(A, r)=\dfrac{\left|\frac{24}{5}-16\right|}{\sqrt{\frac{89}{25}}}>3$.

En el segundo caso $d(A, r)=\dfrac{|72-16|}{\sqrt{577}}<3$ La pendiente de la recta es $m = -24$.



RELEVO C.-

3C.- El producto de las edades de un padre y sus dos hijos es 4018. Si actualmente el padre tiene menos de 45 años, ¿qué edad tenía cuando nació el hijo mayor?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

Descomponemos $4018 = 2 \cdot 7^2 \cdot 41$ y se deduce, obviamente, que la edad del padre es 41 y la de los hijos 7 y 14. Cuando nació el hijo mayor el padre tenía 41 – 14 = 27 años.

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.
Dos trenes viajan a velocidad constante. El más lento recorre en 15 minutos $\frac{T}{27}$ km menos que el más rápido y tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del tren más rápido?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

$T = 27$

Si expresamos el tiempo en horas, 15 minutos es $\frac{1}{4}$ hora y por lo tanto la15 segundos es $\frac{1}{240}$ hora.

Sea v_1 la velocidad del más lento y v_2 la del más rápido. De la primera observación se deduce que

$$\frac{1}{4}v_1(km)+1(km)=\frac{1}{4}v_2(km)\Rightarrow v_2-v_1=4(km/h)$$

De la segunda observación $\frac{4}{v_1}(h)-\frac{1}{240}(h)=\frac{4}{v_2}(h)\Rightarrow \frac{4}{v_1}-\frac{4}{v_2}=\frac{1}{240}\Rightarrow \frac{4(v_2-v_1)}{v_1\cdot v_2}=\frac{16}{v_1\cdot v_2}=\frac{1}{240}$

Por lo tanto $v_1\cdot v_2=16\cdot 240\Rightarrow v_1(4+v_1)=3840\Rightarrow v_1^2+4v_1-3840=0\Rightarrow v_1=60$ (la solución negativa no se considera) y $v_2 = 64$.

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.
En el último examen de Matemáticas de mi clase la nota media ha sido $5+\frac{T}{100}$. Si la nota media de las chicas fue de 6 y la de los chicos de 5, ¿cuántos estudiantes hay en mi clase si no puede haber más de 30?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$T = 64$, por lo que la media ha sido $5+\frac{64}{100}=5{,}64$

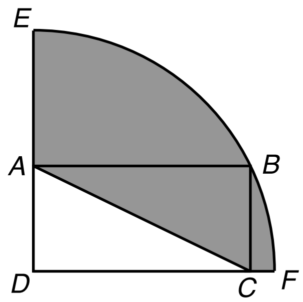
Sean: x es el número de chicas, y el número de chicos.

Entonces $6x + 5y = 5{,}64(x + y) \Rightarrow 0{,}36x = 0{,}64y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{0{,}64}{0{,}36}=\frac{16}{9}$ y como la suma $(x + y)$ ha de ser menor que 30, la única solución posible es $x = 16$, $y = 9$ y por lo tanto $x + y = 25$.

OBSERVACIÓN

En este problema sería muy interesante preguntar por el área de la zona sombreada puesto que si se halla el radio y después los valores de *x* y de *y*, que son $4-\sqrt{2}$ *y* $4+\sqrt{2}$, se obtendría que el área es, $36\pi - 7$.
Se puede dejar para otra ocasión.

5. En la figura adjunta se observa un cuadrante de circunferencia de centro *D* y radio *r* y un rectángulo *ABCD* inscrito en el cuadrante. Si el perímetro del rectángulo es 16 y el perímetro de la región sombreada es 10 + 3π, ¿cuál es el valor del radio *r*?



Llamando *r* al radio, *x* = *AD*, *y* = *DC*, tenemos que *x* + *y* = 8, *AC* = *DB* = *r*.
Entonces *EA* + *CF* = (*r* – *x*) + (*r* – *y*) = 2*r* – (*x* + *y*) = 2*r* – 8

El perímetro es $EA + AC + CF + arcoFE = 2r - 8 + r + \frac{1}{4}2\pi r = 3r - 8 + \frac{\pi}{2}r$, de donde se obtiene que

$$3r - 8 + \frac{\pi}{2}r = 10 + 3\pi \Rightarrow r\left(3 + \frac{\pi}{2}\right) = 18 + 3\pi \Rightarrow r(6+\pi) = 36 + 6\pi \Rightarrow r = 6$$